Power-sums of the number of periodic points of symmetric group actions (Representations of Lie Groups and Noncommutative Harmonic Analysis)

木本, 一史

数理解析研究所講究録
1124 巻 2000 年 32-40

Power-sums of the number of periodic points of symmetric group actions

木本一史 (KAZUFUMI KIMOTO)
九州大学大学院数理学研究科
kimoto@zeta.math.kyushu-u.ac.jp

1 Introduction

n 次対称群 S_n は，置換として n 点集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ に自然に作用している．この作用に関する周期点の個数の冪和を，一般には既約指標による重みを付けた場合で考え，それらの明示公式を得たので紹介する．

最も簡単な「重みなし」冪和の場合の明示公式は次のように与えられる．

Theorem A (重みなし冪和) 任意の $n,l,k\in\mathbf{N}$ に対して

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)^k=\sum_{0\le lj\le n}\left\{ {k \atop j} \right\} l^{k-j} \tag{1}$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)$ は $\sigma\in S_n$ に関する $[n]$ 上の周期 l の周期点の個数を表わす．また，$\left\{ {k \atop j} \right\}$ は第 2 種 *Stirling* 数である．

主定理（Theorem B）の証明方針を簡単に説明する．

周期点の個数 $\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)$ から次のような関数 $\psi_k^{(n,l)}(\sigma)$ を定義する：

$$\psi_k^{(n,l)}(\sigma):=\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)\,(\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)-l)\ldots(\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)-(k-1)l).$$

$\mathrm{Per}_{n,l}$, $\psi_k^{(n,l)}$ は共に S_n 上の類関数である．すぐに §2 で見るように，$\mathrm{Per}_{n,l}^k$ は $\psi_k^{(n,l)}$ たちの 1 次結合として表わされることが分かり，従って問題は $\psi_k^{(n,l)}$ の重み付き和を計算することに帰着される．次に §3 では，適当な写像 $\pi_l:\mathbf{Z}(\hat{S}_n)\to\mathbf{Z}(\hat{S}_{n-l})$ を導入することにより，$\psi_k^{(n,l)}$ たちが π_l を用いて表わされる recurrence relation を満たすことを示す．この π_l の具体的な表示を得るために，§4 では π_l の随伴写像 π_l^* の明示的な表示を求める．これによって得られる π_l の具体的表示と recurrence relation から主定理が従う．

重み付き冪和の明示公式を述べるために，自然数列 η 及び Young 図形（あるいは分割）λ, μ に対して定義される $R_{\lambda\mu}^{\eta}$ という量を定義する．これは特別な場合として，いわゆる Kostka 数を含んでいる（つまり Kostka 数のある種の一般化である）：

$$R_{\lambda(n-k)}^{(1^k)}=K_{\lambda(n-k,1^k)}$$

以上の下で，主定理は次のように与えられる．

Theorem B (重み付き冪和) 任意の $n, l, k \in \mathbf{N}$ 及び $|\lambda| = n$ に対して

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)^k \chi^\lambda(\sigma) = \sum_{0 \le lj \le n} \left\{ {k \atop j} \right\} l^{k-j} R^{(l^k)}_{\lambda(n-lk)}. \tag{2}$$

が成り立つ.

2 準備

まず，いくつかの定義から始める．$\sigma \in S_n$ と $x \in [n]$ に対して，$\sigma^l(x) = x$ なる最小の自然数 l を σ に関する x の周期といい，σ に関する周期 l の周期点の個数を $\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)$ で表わす：

$$\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma) := \sharp\{x \in [n] \mid x \text{ は } \sigma \text{ に関して周期 } l\}.$$

特に，$\mathrm{Fix}_n(\sigma) := \mathrm{Per}_{n,1}(\sigma)$ は不動点の個数を表わす．本稿の主目的は

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)^k \chi^\lambda(\sigma) \tag{3}$$

を適当な組み合わせ的な量を用いて具体的に表わすことである．

良く知られているように，対称群 S_n の共役類は cycle type によって決まっている．つまり，S_n の 2 つの元は，それらが同じ cycle type を持つとき，またそのときに限って共役である．このことを踏まえて，cycle type が $1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l}\ldots n^{\nu_n}$ で与えられる共役類を，同じ記号で表わすことにする．

$\Omega(n)$ を S_n の共役類全体，$\Omega_l(n)$ を，S_n の共役類であって，cycle 分解において少なくとも l-cycle を 1 つは持つようなもの全体とする．つまり，

$$\begin{aligned} \Omega(n) &:= \{1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l}\ldots n^{\nu_n} \mid S_n \text{ の共役類}\}, \\ \Omega_l(n) &:= \{1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l}\ldots n^{\nu_n} \in \Omega(n) \mid \nu_l > 0\}. \end{aligned}$$

簡単に分かるように，$\sigma \in 1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l}\ldots n^{\nu_n}$ ならば $\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma) = l\nu_l$ であり，従って特に，$\mathrm{Per}_{n,l}$ は類関数である．

次に，対称群の表現について簡単に復習しておく．よく知られているように，S_n の既約表現は n 個の箱からなる Young 図形（あるいは n の分割）によってパラメトライズされている．Young 図形 λ に対応する既約指標を χ^λ で表わす．表現とその指標はしばしば同一視されるが，以下では $\hat{S}_n$ で S_n の既約表現の同値類全体，もしくは S_n の既約指標全体を表わすことにする．$\mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ を既約指標の $\mathbf{Z}$ 係数 1 次結合全体がなす群環 $\mathcal{A}(S_n)$ の部分環とする．$\mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ の任意の元は実数値関数である（任意の表現が実表現である）ことに注意しておくと，$\mathcal{A}(S_n)$ の標準内積 $\langle\, ,\, \rangle$ は $f, g \in \mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ に対して

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) g(\sigma)$$

と複素共役が必要ないことに注意する．

冪 $\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)^k$ 自身よりもむしろ，

$$\psi_k^{(n,l)}(\sigma) := \mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)\,(\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma) - l)\ldots(\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma) - (k-1)l)$$

によって定義される関数 $\psi_k^{(n,l)}$ を扱うほうが以下の議論では都合がよい．

Remark. $n < kl$ のとき $\psi_k^{(n,l)}$ は S_n 上で恒等的に 0 となる．実際，各 $\sigma \in S_n$ に対して，その cycle type が $1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l}\ldots n^{\nu_n}$ のとき，$\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma) - \nu_l l = 0$ が（$0 \le \nu_l \le n/l$ なので）$\psi_k^{(n,l)}(\sigma)$ の因子として現われる．

Lemma 2.1 $\mathrm{Per}_{n,l}^k$ は $\psi_j^{(n,l)}$ によって

$$\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)^k = \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} l^{k-j} \psi_j^{(n,l)}(\sigma) \tag{4}$$

と書くことが出来る．但しここで $\left\{ {k \atop j} \right\}$ は第 2 種の *Stirling* 数，つまり集合 $[k]$ を互いに交わらない j 個の空でない部分集合の和に分ける分け方の総数である．

Proof. 次の基本的な恒等式

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} x(x-1)\ldots(x-j+1)$$

において，x に $\dfrac{\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)}{l}$ を代入すればよい．□

この補題によって，関数 $\psi_j^{(n,l)}$ の重み付き和を調べればよいことが分かる．

3 Recurrence relation

この節では，$\psi_k^{(n,l)}$ たちが満たす recurrence relation を示す．これは，以降の議論において中心的な道具になる．また，recurrence relation から直接の系として重みなし冪和の明示公式が得られることを示す．

$\psi_k^{(n,l)}$ たちが満たす recurrence relation を述べるために，2 つの写像 p_l と π_l を導入する．写像 $p_l : \Omega_l(n) \to \Omega(n-l)$ を

$$p_l(1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l}\ldots n^{\nu_n}) = 1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l - 1}\ldots(n-l)^{\nu_{n-l}}.$$

によって定義する．p_l は全単射であることに注意しておく．この p_l を用いて写像 π_l : $\mathbf{Z}(\hat{S}_n) \to \mathbf{Z}(\hat{S}_{n-l})$ は

$$(\pi_l \chi)(C) = \chi\left(p_l^{-1}(C)\right)$$

で定義される．

Remark. $l=1$ のとき，π_1 は表現の制限 $\mathrm{Res}_{S_n}^{S_{n-1}}$ に一致する．

Lemma 3.1 各 $C\in\Omega_l(n)$ に対して

$$\frac{\mathrm{Per}_{n,l}(C)\sharp C}{n!}=\frac{\sharp p_l(C)}{(n-l)!}. \tag{5}$$

が成り立つ．

Proof. $C=1^{\nu_1}\ldots l^{\nu_l}\ldots(n-1)^{\nu_{n-l}}\in\Omega_l(n)$ とする（$\nu_l>0$ ならば $\nu_{n-l+1}=\ldots=\nu_n=0$ であることに注意する）．このとき $p(C)=1^{\nu_1}\ldots\ l^{\nu_l-1}\ldots n^{\nu_n}$ となるから，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Per}_{n,l}(C)\sharp C}{n!} &= \frac{l\nu_l}{n!}\times\frac{n!}{1^{\nu_1}\nu_1!\ldots\ l^{\nu_l}\nu_l!\ldots(n-l)^{\nu_{n-l}}\nu_{n-l}!}\\
&= \frac{1}{(n-l)!}\times\frac{(n-l)!}{1^{\nu_1}\nu_1!\ldots\ l^{\nu_l-1}(\nu_l-1)!\ldots(n-l)^{\nu_{n-l}}\nu_{n-l}!}\\
&= \frac{\sharp p_l(C)}{(n-l)!}.
\end{aligned}$$

となり，(5) を得る．□

目的の recurrence relation は次で与えられる．

Lemma 3.2 (recurrence relation) 任意の $\chi\in\mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ に対して

$$\langle\psi_k^{(n,l)},\chi\rangle=\langle\psi_{k-1}^{(n-l,l)},\pi_l\chi\rangle. \tag{6}$$

が成り立つ．

Proof. $C\notin\Omega_l(n)$ ならば $\psi_k^{(n,l)}(C)=0$ だから，

$$\begin{aligned}
\langle\psi_k^{(n,l)},\chi\rangle &= \frac{1}{n!}\sum_{C\in\Omega_l(n)}\mathrm{Per}_{n,l}(C)(\mathrm{Per}_{n,l}(C)-l)\ldots(\mathrm{Per}_{n,l}(C)-(k-1)l)\chi(C)\sharp C\\
&= \frac{1}{(n-l)!}\sum_{C\in\Omega_l(n)}(\mathrm{Per}_{n,l}(C)-l)\ldots(\mathrm{Per}_{n,l}(C)-(k-1)l)\chi(C)\sharp p_l(C)\\
&= \frac{1}{(n-l)!}\sum_{C\in\Omega(n-l)}((\pi_l\mathrm{Per}_{n,l})(C)-l)\ldots((\pi_l\mathrm{Per}_{n,l})(C)-(k-1)l)\,\pi_l\chi(C)\sharp C\\
&= \frac{1}{(n-l)!}\sum_{C\in\Omega(n-l)}\mathrm{Per}_{n-l,l}(C)\ldots(\mathrm{Per}_{n-l,l}(C)-(k-2)l)\pi_l\chi(C)\sharp C\\
&= \langle\psi_{k-1}^{(n-l,l)},\pi_l\chi\rangle,
\end{aligned}$$

である．ここで，2 番目の等号は Lemma 3.1 による．また 4 番目の等号は $C\in\Omega(n-l)$ に対して $(\pi_l\mathrm{Per}_{n,l})(C)=\mathrm{Per}_{n-l,l}(C)+l$ であることから従う．□

繰り返して (6) を用いることにより,

Corollary 3.3 $\langle \psi_k^{(n,l)}, \chi \rangle = \langle \pi_l^k \chi, 1 \rangle$. □

系の特別な場合として, 重みなし冪和の公式 (Theorem A) を得る.

Proof of Theorem A. 次を示せば十分である：

$$\langle \psi_k^{(n,l)}, 1 \rangle = \begin{cases} 1 & 0 \le lk \le n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

直前の系で $\chi = 1$ とすると, 定義より $\pi_l(1) = 1$ であることから主張の第1の場合が得られる. また $lk > n$ のとき恒等的に $\psi_k^{(n,l)} = 0$ であったから, 主張の第2の場合は明らかである. □

Remark. 冪和 (1) の値は, $n \ge kl$ のときに n に依存しなくなる.

4 Reciprocity と重み付き冪和

π_l^* を標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する π_l の随伴写像, つまり $\mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ から $\mathbf{Z}(\hat{S}_{n+l})$ への線形写像であって, 任意の $f \in \mathbf{Z}(\hat{S}_{n+l})$, $g \in \mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ に対して

$$\langle \pi_l f, g \rangle = \langle f, \pi_l^* g \rangle$$

を満たすものとする. 次の π_l^* の明示表示が重要である.

Theorem 4.1 任意の $\chi \in \mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ に対して,

$$\pi_l^* \chi = \mathrm{Per}_{l,l} \times \chi \tag{8}$$

が成り立つ. 但し $\chi_1 \times \chi_2 = \mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (\chi_1 \otimes \chi_2)$ （$\chi_1 \in \mathbf{Z}(\hat{S}_m)$, $\chi_2 \in \mathbf{Z}(\hat{S}_n)$）である.

Proof. 誘導表現の指標に関する Frobenius の公式を用いる：

$$(\mathrm{Ind}_H^G \varphi)(C) = \sum_{C_0 \subset C \cap H} \frac{\sharp G}{\sharp H} \frac{\sharp C_0}{\sharp C} \varphi(C_0). \tag{9}$$

ここで, $\varphi \in \mathbf{Z}(\hat{H})$ であり, C_0 は H の共役類であって $C \cap H$ に含まれるようなもの全体を渡る和である.

主張を示すために, (8) の両辺をそれぞれ計算する.

[右辺]：$C \cap (S_l \times S_n)$ に含まれる $S_l \times S_n$ の共役類を $C_1 \times C_2$ とする（$C_1 \subset S_l$, $C_2 \subset S_n$）.

$$\mathrm{Per}_{l,l}(C_1) = \begin{cases} l & C_1 \text{ が } l\text{-cycles のとき}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{10}$$

であるから，$\mathrm{Per}_{l,l}\otimes\chi$ は $C_1=l$-cycles のときに限り 0 でない値を与えうるが，このとき C_2 は自動的に $p_l(C)$ に一致する．従って，

$$(\mathrm{Per}_{l,l}\otimes\chi)(C_1\times C_2)=\begin{cases} l\cdot\chi(p_l(C)) & C_1=l\text{-cycles のとき}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{11}$$

である．$C\notin\Omega_l(l+n)$ ならば $C_1=l$-cycles となり得ないことに注意する．Frobenius の公式から，$C\in\Omega_l(l+n)$ のとき

$$(\mathrm{Per}_{l,l}\times\chi)(C)=\frac{(l+n)!}{l!n!}\frac{(l-1)!\sharp p_l(C)}{\sharp C}l\cdot\chi(p_l(C))=\frac{(l+n)!}{n!}\frac{\sharp p_l(C)}{\sharp C}\chi(p_l(C)) \tag{12}$$

となるので，まとめて

$$(\mathrm{Per}_{l,l}\times\chi)(C)=\begin{cases} \dfrac{(l+n)!}{n!}\dfrac{\sharp p_l(C)}{\sharp C}\chi(p_l(C)) & C\in\Omega_l(l+n)\text{ のとき}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{13}$$

となる．

[左辺]： 各 $C\in\Omega(n+l)$ に対して，C の “特性関数” χ_C を

$$\chi_C:=\sum_\lambda\chi^\lambda(C)\chi^\lambda$$

で定義する．既約指標の第 2 直交関係から，

(i) $C_0\in\Omega(n+l)$ に対して $\chi_C(C_0)=\dfrac{(n+l)!}{\sharp C}\delta_{C,C_0}$,

(ii) $\chi\in\mathbf{Z}(\hat{S}_{n+l})$ に対して $\langle\chi\,,\chi_C\rangle=\chi(C)$,

がわかる．

さて，$C\in\Omega(n+l)$ を固定する．類関数 $\chi\in\mathbf{Z}(\hat{S}_n)$ に対して

$$\pi_l^*\chi(C)=\langle\pi_l^*\chi\,,\chi_C\rangle=\langle\chi\,,\pi_l\chi_C\rangle \tag{14}$$

であるが，この式の最右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\langle\chi\,,\pi_l\chi_C\rangle &= \frac{1}{n!}\sum_{C_0\in\Omega(n)}\chi(C_0)\pi_l\chi_C(C_0)\sharp C_0\\ &=\sum_{C_0\in\Omega(n)}\sum_{|\lambda|=n+l}\frac{1}{n!}\chi(C_0)\chi^\lambda(C)\chi^\lambda(p_l^{-1}(C_0))\sharp C_0\\ &=\sum_{C_0\in\Omega(n)}\frac{(n+l)!}{n!}\frac{\sharp C_0}{\sharp C}\chi(C_0)\delta_{C,p_l^{-1}(C_0)}\\ &=\begin{cases}\dfrac{(n+l)!}{n!}\dfrac{\sharp p_l(C)}{\sharp C}\chi(p_l(C)) & C\in\Omega_l(n)\text{ のとき},\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}\end{aligned}$$

となる．

これら両辺を比較して，定理の式を得る．□

Remark. $l=1$ のとき，作用素 "$\mathrm{Per}_{1,1}\times$" は通常の表現の誘導 $\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}}$ に一致することから，Theorem 4.1 は Frobenius の相互律を含んでいる．

Corollary 4.2 $\pi_l\chi^\lambda = \sum_{\mu\subset\lambda} \chi^{\lambda/\mu}(l\text{-}cycle)\chi^\mu.$

Proof. $\pi_l\chi^\lambda$ の各既約成分の係数を計算する．(10) より $\mathrm{Per}_{l,l}$ が l-cycles の特性関数に一致することから，

$$\begin{aligned}\langle \pi_l\chi^\lambda, \chi^\mu \rangle &= \langle \chi^\lambda, \pi_l^*\chi^\mu \rangle = \langle \chi^\lambda, \mathrm{Per}_{l,l}\times\chi^\mu \rangle \\ &= \langle \chi^{\lambda/\mu}, \mathrm{Per}_{l,l} \rangle = \chi^{\lambda/\mu}(l\text{-cycle}) .\end{aligned}$$

となり，求める表示を得る．□

Remark. $|\lambda| = l$ のとき，

$$\chi^\lambda(l\text{-cycle}) = \begin{cases} (-1)^{l(\lambda)+1} & \lambda \text{ が hook-type,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{15}$$

が成り立つが，これの類似として，$|\lambda/\mu| = l$ のとき

$$\chi^{\lambda/\mu}(l\text{-cycle}) = \begin{cases} (-1)^{l(\lambda/\mu)+1} & \lambda/\mu \text{ が skew-hook,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{16}$$

が比較的簡単な組合せ的議論で示され，上の系はいわゆる Murnaghan-Nakayama の公式（[FH] や [Ja] を参照）を系として含んでいることがわかる．

自然数列 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \in \mathbf{N}^k$ 及び分割 λ, μ が条件
(i) $\lambda \supset \mu$,
(ii) $|\lambda| - |\mu| = |\eta| \,(= \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k)$
を満たしているとする．このとき，分割の列

$$\lambda = \nu_0 \supset \nu_1 \supset \ldots \supset \nu_k = \mu$$

であって，各 j に対して $|\nu_{j-1}/\nu_j| = \eta_j$ を満たすものを λ/μ に対する η-tableau と呼ぶことにする．また，$\mathrm{Tab}_\eta(\lambda/\mu)$ で λ/μ に対する η-tableau 全体の集合を表わす．

各 $\nu = \{\nu_j\} \in \mathrm{Tab}_\eta(\lambda/\mu)$ に対して，その符号を

$$\mathrm{sgn}(\nu) := \chi^{\nu_0/\nu_1}(\eta_1\text{-cycle}) \ldots \chi^{\nu_{k-1}/\nu_k}(\eta_k\text{-cycle})$$

によって定義する．これらのもとで，分割 λ, μ 及び自然数列 $\eta \in \mathbf{N}^k$ に対して $R^\eta_{\lambda\mu}$ を

$$R^\eta_{\lambda\mu} := \sum_{\nu\in\mathrm{Tab}_\eta(\lambda/\mu)} \mathrm{sgn}(\nu)$$

で定義する．

Remark. 実際には，上の Remark より，各 skew diagram ν_{j-1}/ν_j が skew-hook の場合にのみ符号が 0 でない値を与える．また $\eta=(1^k)=(1,1,\ldots,1)$ のとき，$R^{(1^k)}_{\lambda(n-k)}$ は Kostka 数 $K_{\lambda(n-k,1^k)}$ に一致する．

Corollary 4.2 を繰り返し用いることにより，

Corollary 4.3 自然数列 $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_k)$ に対して $\pi_\eta=\pi_{\eta_k}\ldots\pi_{\eta_1}$ とおくと，

$$\pi_\eta\chi^\lambda=\sum_\mu R^\eta_{\lambda\mu}\chi^\mu$$

が成り立つ．□

この系から主定理は次のように証明される．

Proof of Theorem B. Corollary 4.3 において $\eta=(l^k)$ とすると，

$$\pi_l^k\chi^\lambda=\sum_\lambda R^{(l^k)}_{\lambda\mu}\chi^\mu$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Per}_{n,l}(\sigma)^k\chi^\lambda(\sigma) &= \sum_{j=0}^{k}\left\{\begin{matrix}k\\ j\end{matrix}\right\}l^{k-j}\langle\,\psi_j^{(n,l)}\,,\,\chi^\lambda\,\rangle\\ &= \sum_{0\le lj\le n}\left\{\begin{matrix}k\\ j\end{matrix}\right\}l^{k-j}\langle\,\pi_l^k\chi^\lambda\,,\,1\,\rangle\\ &= \sum_{0\le lj\le n}\left\{\begin{matrix}k\\ j\end{matrix}\right\}l^{k-j}R^{(l^k)}_{\lambda(n-lj)}\end{aligned}$$

となり，Theorem B を得る．□

また，特別な場合として，$l=1$ のとき不動点の個数の重み付き冪和の表示を得る．

Corollary 4.4 任意の $n,k\in\mathbf{N}$ 及び $|\lambda|=n$ に対して，

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{Fix}_n(\sigma)^k\chi^\lambda(\sigma)=\sum_{j=0}^{n}\left\{\begin{matrix}k\\ j\end{matrix}\right\}K_{\lambda(n-j,1^j)} \tag{17}$$

が成り立つ．□

参考文献

[FH] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory,* Graduate Texts in Mathematics **129**, Springer, 1991.

[Fu] W. Fulton, *Young Tableaux*, Cambridge University Press, 1997.

[GKP] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Publ., 1989.

[Ja] G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups,* Lecture Notes in Mathematics **682**, Springer, 1978.

[Ki] K. Kimoto, *Power-sums of the number of fixed points of symmetric group actions*, Kyushu University Preprint Series in Mathematics **8**, 1999.

[Ma] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition*, Oxford University Press, 1995.

[Si] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics **10**, AMS, 1995.